第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積

22 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

《15 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

《14 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24　空間内にある半径 1 の球(内部を含む)を B とする．直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1)　B の中心と l との距離を求めよ．

(2)　l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

《14 名大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積

22　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$$

と定める．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

《15 東工大・理系》

【答】　(1)　$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　　(2)　略　　(3)　3

【解説】　(1)　$a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-3}{a_n-2}$ と $a_1-3=2>0$ より帰納的に $a_n-3>0$ である．

よって $\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=\dfrac{a_n-2}{a_n-3}=1+\dfrac{1}{a_n-3}$ とできるので，$\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{1}{a_1-3}+(n-1)\cdot 1$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{2n-1}{2}$ となるので，$a_n=\dfrac{2}{2n-1}+3$ よって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}}$．

(2)　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=5$，$3+\dfrac{4}{1+1}=5$ より，$n=1$ のとき $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ は成り立つ．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $b_k\leqq 3+\dfrac{4}{k+1}$ つまり

$$\frac{a_1+\cdots+ka_k}{1+\cdots+k}\leqq 3+\frac{4}{k+1} \iff a_1+\cdots+ka_k\leqq(1+\cdots+k)\left(3+\frac{4}{k+1}\right)$$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
&3+\frac{4}{(k+1)+1}-b_{k+1}\\
&=3+\frac{4}{k+2}-\frac{a_1+\cdots+ka_k+(k+1)a_{k+1}}{1+\cdots+k+(k+1)}\\
&\geqq\ 3+\frac{4}{k+2}-\frac{1}{1+\cdots+k+(k+1)}\left\{(1+\cdots+k)\left(3+\frac{4}{k+1}\right)+(k+1)\cdot\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}\right\}\\
&=\ \frac{4k}{(k+1)(k+2)(2k+1)}\ >\ 0
\end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときにも $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ は成り立つ．

よって数学的帰納法により任意の自然数 n について $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が示された．

(3)　(1)より $a_n>3$ なので $b_n>\dfrac{3+2\cdot 3+\cdots+n\cdot 3}{1+2+\cdots+n}=3$ である．これと(2)の結果より

$3<b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\mathbf{3}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

《14 北大・理系》

【答】（1）　$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|$

(2)　最大値 1 $\left(x=\frac{\pi}{3}\right)$，最小値 $2-\sqrt{3}$ $\left(x=\frac{5}{6}\pi\right)$

【解説】（1）　$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ より

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\cdot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)'-|\sin x|\cdot(x)'=\boldsymbol{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|}$$

(2)　(1)の結果より

$$f'(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x & \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x & \left(\frac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)\end{cases}=\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)\end{cases}$$

となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
$f'(x)$		＋	0	－		－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

となる．

このとき，$|\sin(\theta+\pi)|=|\sin\theta|$ より $f(0)=f(\pi)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta$ なので

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ で最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=\boldsymbol{1}$ をとり，

$\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}$ で最小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}|\sin\theta|d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\,d\theta=2\Big[-\cos\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24　空間内にある半径１の球(内部を含む)を B とする．直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1)　B の中心と l との距離を求めよ．

(2)　l のまわりに B を１回転してできる立体の体積を求めよ．

《14 名大・理系》

【答】 (1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{12}$

【解説】 (1)　B の中心から線分に垂線を下ろすと，垂線の足は丁度線分の中点になるので，三平方の定理より求める距離は $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$.

(2)　求める立体の体積は xy 平面内の円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$ を x 軸まわりに回転したときにできる立体の体積に等しいので，$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1 \iff y=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{1-x^2}$ であることと，y 軸に関する対称性より求める体積は

$$2\left\{\int_0^1\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^1\left(\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}\right)dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\left(\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}\right)dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-x^2\right)dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}$$

であるが，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-x^2\right)dx=\left[\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることと $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ と $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ については $x=\sin\theta$ と置換積分することで

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta|\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{2\theta+\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

同様に

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\frac{2\theta+\sin2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

なので，求める体積は

$$2\pi\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{12}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。